

**LISTA ZAGADNIEŃ NA EGZAMIN DYPLOMOWY
DLA KIERUNKU MATEMATYKA, STUDIA DRUGIEGO STOPNIA***

Analiza zespolona

1. Różniczkowalność funkcji zmiennej zespolonej. Porównanie z różniczkowalnością funkcji rzeczywistej dwóch zmiennych. Interpretacja geometryczna pochodnej. Funkcje holomorficzne.
2. Przykłady funkcji holomorficzych (homografie, funkcja wykładnicza, funkcje trygonometryczne) jako przekształceń konforemnych.
3. Całka funkcji ciągłej wzdłuż drogi. Pierwotna funkcji wzdłuż drogi i pierwotna globalna. Wzór Newtona-Leibniza. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego.
4. Wzór całkowy Cauchy'ego (w tym w wersji ogólnej). Rozwijanie funkcji holomorficzej w szereg Taylora.
5. Szeregi Laurenta. Klasyfikacja osobliwości.
6. Residua i ich zastosowanie dla obliczania całek w $\mathbf{R}$.
7. Zasada argumentu. Twierdzenie Rouchégo i jego zastosowanie dla zliczania pierwiastków.

Matematyka obliczeniowa

8. Metody numeryczne służące do rozwiązywania równań nieliniowych.
9. Metody numeryczne służące do rozwiązywania układów równań liniowych.
10. Numeryczne wyznaczanie wektorów i wartości własnych macierzy.
11. Aproksymacja. Przykłady aproksymacyjnych metod numerycznych.
12. Interpolacja. Przykłady interpolacyjnych metod numerycznych.
13. Różniczkowanie i całkowanie numeryczne.
14. Numeryczna optymalizacja funkcji jednej zmiennej.

Teoria miary i całki

15. σ -ciała. Miara. Miara zewnętrzna. Twierdzenie Caratheodory'ego.
16. Miara Lebesgue'a. Zbiór Vitaliego. Charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Zbiory miary zero.
17. Funkcje mierzalne.
18. Całka wg miary: zarys konstrukcji, podstawowe własności.
19. Porównanie całek Lebesgue'a i Riemanna. Charakteryzacja funkcji $\mathbf{R}$ -całkowalnych.
20. Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. Lemat Fatou. Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajorizowanej. Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej.
21. Twierdzenie Fubiniiego. Zamiana zmiennych w całce Lebesgue'a.

* obowiązuje od roku akademickiego 2025/2026

Topologia

- 22. Różne sposoby zadawania topologii: zbiory otwarte, domknięte, wnętrze i domknięcie zbioru. Dualność tych pojęć. Bazy i podbazy zbiorów otwartych. Przykłady przestrzeni topologicznych.
- 23. Zbiory gęste, nigdziegęste i brzegowe. Pochodna zbioru. Definicje, przykłady i zależności pomiędzy zbiorami.
- 24. Odwzorowania ciągłe, homeomorfizmy. Definicja, przykłady, warunki równoważne.
- 25. Aksjomaty oddzielania. Przestrzeń Hausdorffa, przestrzeń regularna, przestrzeń całkowicie regularna, przestrzeń normalna. Przykłady i kontrprzykłady. Lemat Urysohna. Twierdzenie Tietzego-Urysohna.
- 26. Topologia indukowana, topologia produktowa, topologia ilorazowa. Własności uniwersalności.
- 27. Przestrzeń topologiczne zwarte. Przykłady i własności. Twierdzenie Tichonowa.
- 28. Przestrzeń topologiczne spójne. Przykłady i własności. Składowe spójne.

Analiza funkcjonalna

- 29. Przestrzeń unormowana. Przestrzeń Banacha. Przykłady przestrzeni ciągłych i funkcyjnych. Nierówność Höldera i Minkowskiego.
- 30. Zbieżność szeregów w przestrzeniach unormowanych.
- 31. Ciągłość odwzorowań liniowych. Warunki równoważne na ciągłość operatora. Norma operatora.
- 32. Twierdzenie Banacha-Steinhaus, twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym, o odwzorowaniu odwrotnym i o domkniętym wykresie.
- 33. Twierdzenie Hahna-Banacha i wnioski z tego twierdzenia.
- 34. Przestrzeń unitarna. Przestrzeń Hilberta. Nierówność Cauchy'ego-Schwarza i związek iloczynu skalarnego z normą.
- 35. Ortogonalność. Twierdzenie o rzucie ortogonalnym. Szeregi Fouriera. Nierówność Bessela. Tożsamość Parsewala.

Teoria Galois

- 36. Grupy rozwiązalne. Problem rozwiązalności grup permutacji.
- 37. Elementy algebraiczne i przestępne.
- 38. Rozszerzenia algebraiczne ciał, związek z rozszerzeniami skończonymi i skończenie generowanymi. Ciała algebraicznie domknięte. Rozszerzenie ciała o pierwiastek wielomianu. Ciała rozkładu.
- 39. Rozszerzenia rozdzielcze. Twierdzenie Abela o elemencie pierwotnym.
- 40. Rozszerzenia normalne, pozytywne i negatywne: przykłady.
- 41. Rozszerzenia Galois, grupy Galois, zasadnicze twierdzenie teorii Galois.
- 42. Zastosowanie teorii Galois: rozwiązywanie równań przez pierwiastniki, wykonalność konstrukcji geometrycznych.

Funkcje rzeczywiste

- 43. Funkcje o wahaniu ograniczonym. Rozkłady Jordana i Lebesgue'a.
Twierdzenie Lebesgue'a o punktach różniczkowości.
- 44. Funkcje absolutnie ciągłe. Związek z całką Lebesgue'a.
- 45. Klasyfikacja Baire'a zbiorów i funkcji borelowskich.
- 46. Funkcje pierwszej klasy Baire'a (przykłady, własności, charakteryzacje).
- 47. Zbieżność ciągów funkcyjnych (w tym zbieżność przeciętna z potęgą p , według miary, prawie wszędzie)
- 48. Funkcje wypukłe/wklęsłe na przedziale. Własności (monotoniczność, ciągłość, różniczkowalność).
- 49. Funkcje o domkniętym wykresie i funkcje z klasy B_1^* : charakteryzujące, związek z klasyfikacją Baire'a.

Równania różniczkowe cząstkowe

- 50. Równania liniowe oraz quasi-liniowe rzędu pierwszego. Metoda charakterystyk.
- 51. Klasyfikacja równań rzędu drugiego.
- 52. Sprowadzanie równania z dwiema zmiennymi do postaci kanonicznej za pomocą charakterystyk.
- 53. Równanie struny nieskończonej. Wzór d'Alemberta.
- 54. Równanie drgań struny skończonej. Metoda Fouriera.
- 55. Równanie przewodnictwa ciepła. Jądro ciepła.
- 56. Równanie Laplace'a. Funkcja Greena.