

LISTA ZAGADNIENI NA EGZAMIN DYPLOMOWY DLA KIERUNKU MATEMATYKA, STUDIA PIERWSZEGO STOPNIA¹

Wstęp do matematyki

1. Relacje. Relacja równoważności.
2. Pojęcie funkcji. Funkcje odwracalne. Obrazy i przeciwobrazy.
3. Moc zbioru. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne.
4. Porządek w zbiorze. Lemat Kuratowskiego-Zorna.
5. Aksjomatyka liczb naturalnych. Indukcja matematyczna.
6. Wybrana aksjomatyka liczb rzeczywistych. Kresy zbiorów.

Analiza matematyczna

7. Szeregi liczbowe. Kryteria zbieżności.
8. Pojęcie i własności pochodnej funkcji jednej zmiennej.
9. Twierdzenia o wartości średniej.
10. Pochodne wyższych rzędów. Funkcje klasy C_k . Funkcje gładkie.
11. Twierdzenie Taylora i jego zastosowania.
12. Zbieżność jednostajna i punktowa ciągów i szeregów funkcyjnych.
13. Szereg potęgowy. Promień zbieżności. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy.
14. Definicja całki Riemanna. Podstawowe własności.
15. Twierdzenie o wartości średniej dla całki.
16. Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego. Wzór Leibniza-Newtona.
17. Funkcja pierwotna. Całka nieoznaczona. Podstawowe metody całkowania.
18. Całkowanie i różniczkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych.
19. Twierdzenie o lokalnym odwracaniu odwzorowań. Twierdzenie o funkcjach uwikłanych.
20. Druga pochodna. Ekstrema lokalne.
21. Całkowanie funkcji wielu zmiennych. Całki iterowane. Zamiana zmiennych.
22. Całkowanie form różniczkowych. Twierdzenia Greena, Gaussa-Ostrogradskiego i Stokesa.

Algebra

23. Ciało liczb zespolonych.
24. Macierze. Działania na macierzach.
25. Wyznaczniki. Metody obliczania.
26. Układy równań liniowych. Metody rozwiązywania.
27. Pierwiastki wielomianów. Zasadnicze twierdzenie algebry.
28. Przestrzenie liniowe.

¹ obowiązuje od roku akademickiego 2020/2021

29. Odwzorowania liniowe. Macierze odwzorowania, macierze przejścia.
30. Grupy: definicja i przykłady. Twierdzenie Cayleya.
31. Rząd grupy. Twierdzenie Lagrange'a. Grupy niskich rzędów.
32. Dzielnik normalny i grupa ilorazowa.
33. Homomorfizmy grup. Podstawowe twierdzenie o homomorfizmach grup.
34. Grupy cykliczne. Rząd elementu.
35. Pierścienie: definicja i przykłady. Elementy odwracalne i dzielniki zera w pierścieniach.
36. Homomorfizmy pierścieni. Podstawowe twierdzenie o homomorfizmach pierścieni.
37. Dziedziny i ciała: definicja i przykłady.
38. Ideały pierwsze i maksymalne. Pierścienie ilorazowe.
39. Elementy nierozkładalne i pierwsze. Pierścienie z jednoznacznym rozkładem.
40. Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotna. Pierścienie euklidesowe. Algorytm Euklidesa.
41. Ciała i pierścienie ułamków.

Teoria liczb

42. Liczby pierwsze. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki. Znane fakty o rozmieszczeniu liczb pierwszych.
43. Równania diofantyczne. Sposoby ich rozwiązywania (minimum 2).
44. Własności relacji kongruencji: klasa reszt modulo n , skończona grupa addytywna i mnożylna z działaniem dodawania i mnożenia modulo n .
45. Rozwiązywanie kongruencji liniowych i układów kongruencji. Kongruencje kwadratowe.
46. Funkcja Eulera i jej własności. Twierdzenia Eulera, Wilsona, małe twierdzenie Fermata.

Rachunek prawdopodobieństwa

47. Pojęcie prawdopodobieństwa, przykłady.
48. Prawdopodobieństwo warunkowe. Wzór Bayesa.
49. Zmienne losowe, wektory losowe i ich charakterystyki liczbowe (wartości oczekiwane, wariancje).
50. Dystrybuanta rozkładu zmiennej losowej. Typy rozkładów (dyskretne, ciągle osobliwe, absolutnie ciągłe). Gęstość rozkładu.
51. Podstawowe rozkłady zmiennych losowych (normalny, Poissona, dwumianowy, wykładniczy).
52. Niezależność zmiennych losowych oraz zdarzeń. Schemat Bernoulliego.
53. Funkcja charakterystyczna rozkładu prawdopodobieństwa i jej zastosowania.
54. Mocne i słabe prawa wielkich liczb.
55. Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a i centralne twierdzenie graniczne.

Matematyka dyskretna

56. Permutacje. Kombinacje. Wariacje. Rozmieszczenia uporządkowane.

57. Podziały zbiorów, permutacji i liczb. Liczby Stirlinga i liczby $P(n,k)$.
58. Równania rekurencyjne. Metody rozwiązywania (równania liniowe o stałych współczynnikach).
59. Konfiguracje i wzory - zliczanie z utożsamieniami. Lemat Burnside'a i twierdzenie Pólyi.
60. Grafy planarne. Twierdzenie Kuratowskiego. Wzór Eulera.
61. Grafy Eulera i Hamiltona. Charakteryzacje (w tym warunki dostateczne).
62. Liczba i indeks chromatyczne grafu. Problem czterech barw.

Statystyka matematyczna

63. Klasyczne i pozycyjne miary tendencji centralnej.
64. Klasyczne i pozycyjne miary zmienności.
65. Skośność i spłaszczenie rozkładu zmiennej losowej.
66. Przedziały ufności dla podstawowych parametrów rozkładu zmiennej losowej.
67. Parametryczne testy istotności.
68. Współczynnik korelacji liniowej Pearsona.
69. Współczynnik korelacji Spearmana.

Topologia

70. Przestrzeń metryczna: definicja, przykłady. Charakteryzacja zbiorów otwartych oraz domkniętych.
71. Topologia w przestrzeniach metrycznych. Przykład topologii nieindukowanej przez metrykę.
72. Ciągłe odwzorowania przestrzeni metrycznych. Definicja w sensie Cauchy'ego oraz Heinego. Inne równoważne warunki ciągłości.
73. Przestrzenie metryczne zupełne i ośrodkowe. Podstawowe własności i przykłady.
74. Twierdzenie Baire'a o przestrzeniach metrycznych zupełnych.
75. Twierdzenie Banacha o punkcie stałym.
76. Przestrzenie metryczne zwarte: przykłady, związek z zupełnością i ośrodkowością. Warunki równoważne zwartości.
77. Funkcje ciągłe na przestrzeniach metrycznych zwartych. Uogólnione twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.
78. Przestrzenie metryczne spójne. Podstawowe własności i przykłady.

Równania różniczkowe zwyczajne

79. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań problemu Cauchy'ego.
80. Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych oraz jednorodne.
81. Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego.
82. Równania różniczkowe zupełne oraz z czynnikiem całkującym.
83. Równania różniczkowe liniowe wyższych rzędów. Układ fundamentalny, wyznacznik Wrońskiego.