INSTYTUT MATEMATYKI
UNIWERSYTET KAZIMIERZA WIELKIEGO

LISTA ZAGADNIEŃ NA EGZAMIN DYPLOMOWY
DLA KIERUNKU MATEMATYKA, STUDIA DRUGIEGO STOPNIA

Teoria miary i całki

1. **σ**-ciała. Miara. Miara zewnętrzna. Twierdzenie Caratheodory'ego.
2. Miara Lebesgue'a. Zbiór Vitalego. Charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Zbiory miary zero.
3. Funkcje mierzalne.
4. Całka wg miary: zarys konstrukcji, podstawowe własności.
5. Porównanie całek Lebesgue'a i Riemanna. Charakteryzacja funkcji R-całkowalnych.
6. Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. Lemat Fatou. Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej.
7. Twierdzenie Fubiniego. Zamiana zmiennych w całce Lebesgue'a.

Topologia

8. Różne sposoby zadawania topologii: zbiory otwarte, domknięte, wnętrze i domknięcie zbioru. Dualność tych pojęć. Bazy i podbazy zbiorów otwartych. Przykłady przestrzeni topologicznych.
9. Odwzorowania ciągłe, otwarte, domknięte. Homeomorfizmy.
10. Aksjomaty oddzielania. Przestrzeń Hausdorffa, przestrzeń regularna, przestrzeń całkowicie regularna, przestrzeń normalna. Przykłady i kontrprzykłady. Lemat Urysohna. Twierdzenie Tietzego-Urysohna.
11. Topologia indukowana, topologia produktowa, topologia ilorazowa. Własności uniwersalności.
12. Przestrzenie topologiczne zwarte. Przykłady i własności. Twierdzenie Tichonowa.
13. Przestrzenie topologiczne spójne i łukowo spójne. Przykłady i własności. Składowe spójne.
14. Homotopia odwzorowań. Homotopia dróg.
15. Grupa podstawowa przestrzeni topologicznej i jej zastosowania.
16. Klasyfikacja powierzchni zwartych i spójnych bez brzegu.

Analiza funkcjonalna

17. Przestrzenie unormowane. Przestrzenie Banacha. Przykłady przestrzeni ciągowych i funkcyjnych. Nierówność Höldera i Minkowskiego.
18. Zbieżność szeregów w przestrzeniach unormowanych.

19. Zbiory wypukłe, zbiory pochłaniające oraz zbiory zbalansowane.
20. Ciągłość odwzorowań liniowych; warunki równoważne na ciągłość operatora. Twierdzenie Banacha-Steinhausa.
21. Twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym, o odwzorowaniu odwrotnym i o wykresie domkniętym.
22. Twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonałów liniowych i ciągłych.
23. Twierdzenie Hahna-Banacha i wnioski z tego twierdzenia.
24. Przestrzenie unitarne. Przestrzenie Hilberta i nierówność Cauchy'ego-Schwarza.
25. Ortogonalność. Twierdzenie Grama-Schmidta. Twierdzenie o rzucie ortogonalnym.
26. Szeregi Fouriera. Tożsamość Parsevala. Nierówność Bessela.

Teoria Galois

27. Grupy rozwiązalne. Problem rozwiązalności grup permutacji.
28. Rozszerzenia ciał, stopień rozszerzenia, rozszerzenia skończone.
29. Rozszerzenia pierścieniowe. Rozszerzenia skończenie generowane ciał.
30. Elementy algebraiczne i przestępne.
31. Rozszerzenia algebraiczne ciał, związek z rozszerzeniami skończonymi i skończenie generowanymi. Ciała algebraicznie domknięte. Rozszerzenie ciała o pierwiastek wielomianu. Ciała rozkładu.
32. Rozszerzenia rozdzielcze. Twierdzenie Abela o elemencie pierwotnym.
33. Rozszerzenia normalne, pozytywne i negatywne: przykłady.
34. Rozszerzenia Galois, grupy Galois, zasadnicze twierdzenie teorii Galois.
35. Zastosowanie teorii Galois do rozwiązywania równań przez pierwiastniki.
36. Zastosowanie do problemu wykonalności konstrukcji geometrycznych.

Analiza zespolona

37. Różniczkowalność funkcji zmiennej zespolonej. Porównanie z różniczkowalnością funkcji rzeczywistej dwóch zmiennych. Interpretacja geometryczna pochodnej. Funkcje holomorficzne.
38. Przykłady funkcji holomorficznych (homografie, funkcja wykładnicza, funkcje trygonometryczne) jako przekształceń konforemnych.
39. Całka funkcji ciągłej wzdłuż drogi. Pierwotna funkcji wzdłuż drogi i pierwotna globalna. Wzór Newtona-Leibniza. Twierdzenie całkowe Cauchy’ego.
40. Wzór całkowy Cauchy’ego (w tym w wersji ogólnej). Rozwijanie funkcji holomorficznej w szereg Taylora.
41. Szeregi Laurenta. Klasyfikacja osobliwości.
42. Residua i ich zastosowanie dla obliczania całek w **R**.
43. Zasada argumentu. Twierdzenie Rouchégo i jego zastosowanie dla zliczania pierwiastków.

Funkcje rzeczywiste

44. Funkcje o wahaniu ograniczonym. Rozkłady Jordana i Lebesgue'a. Twierdzenie Lebesgue'a o punktach różniczkowalności.
45. Funkcje absolutnie ciągłe. Związek z całką Lebesgue'a.
46. Całka Kurzweila-Henstocka. Związek z całkami Riemanna i Lebesgue'a, problem całkowalności pochodnych.
47. Klasyfikacja Baire'a zbiorów i funkcji borelowskich. Funkcje pierwszej klasy Baire'a (przykłady, własności, charakteryzacje).
48. Funkcje wypukłe/wklęsłe na przedziale. Własności (monotoniczność, ciągłość, różniczkowalność).

Równania różniczkowe cząstkowe

49. Równania liniowe oraz quasiliniowe rzędu pierwszego. Metoda charakterystyk.
50. Klasyfikacja równań półliniowych rzędu drugiego. Sprowadzanie równania z dwiema zmiennymi do postaci kanonicznej za pomocą charakterystyk.
51. Równanie struny nieskończonej. Wzór d'Alemberta.
52. Równanie drgań struny skończonej. Metoda Fouriera.
53. Równanie przewodnictwa. Jądro ciepła.
54. Równanie Laplace'a. Funkcja Greena.

Matematyka obliczeniowa

55. Metoda bisekcji rozwiązywania równań nieliniowych.
56. Metoda siecznych rozwiązywania równań nieliniowych.
57. Metoda Newtona rozwiązywania równań nieliniowych.
58. Metoda Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych.
59. Metoda LU rozwiązywania układów równań liniowych.
60. Aproksymacja średniokwadratowa wielomianowa.
61. Interpolacja. Przykłady interpolacyjnych metod numerycznych.
62. Kwadratury Newtona-Cotesa.